

Principe Fondamental de la Dynamique

Le PFD fournit une relation entre les masses, les forces et les accélérations d'un système mécanique. Il ne fait intervenir que les efforts extérieurs, et il peut être appliqué à des solides, du liquide ou du gaz.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la mécanique classique admettant de ce fait

- que les propriétés du référentiel espace-temps sont identiques pour tout observateur,
- qu'à tout corps matériel on peut associer une masse (nombre positif),
- et que les actions mécaniques peuvent être modélisées par un champ de vecteur liés.

Après avoir énoncé le PFD et les Théorèmes généraux qui en découlent, nous précisons la notion de référentiel galiléen, puis nous nous attacherons à définir une démarche méthodologique permettant d'aborder et d'analyser correctement un problème de mécanique industrielle. Des exemples d'application du PFD seront traités pour illustrer cette démarche.

1 Énoncé du PFD

Le PFD est un principe d'existence qui stipule l'existence de repères privilégiés dits galiléens, sans dire comment les choisir. L'énoncé que nous avons retenu est le suivant.

Énoncé :

Il existe des référentiels privilégiés dits **référentiels galiléens**, tels que à **tout instant et pour tout système matériel** considéré, le champ de vecteur des **efforts extérieurs** appliqués à ce système et le champ des **quantités d'accélération** du système sont égaux :

$$\forall t \quad \left\{ F_{ext/\Sigma} \right\}_A = \left\{ m \gamma_{\Sigma/Rg} \right\}_A$$

Le système d'unités utilisées doit être cohérent, masse, force, longueur, et temps sont liées par la relation dimensionnelle : $[F] = [M][L][T^{-2}]$

Dans le Système International : Newton, Kilogramme, mètre, seconde.

En général le problème à résoudre est mixte, connaissant une partie des efforts (ceux qui sont imposés) et les liaisons cinématiques, trouver les mouvements et éventuellement certains efforts de liaison.

Cas particuliers :

Connaissant les masses et le mouvement en déduire une répartition de force

Exemples : Énoncée de la loi de l'attraction universelle par Newton.

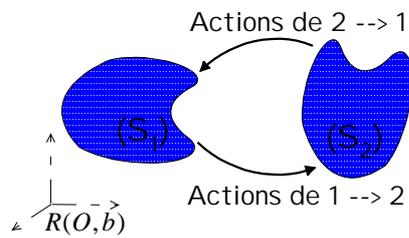
Tous les problèmes de statique (calcul statique des efforts de liaison)

Connaissant les efforts et les mouvements trouver les masses

Exemple : Détermination de la masse des planètes.

2 Théorèmes de la mécanique

• Théorème de l'action - réaction



A tout instant les actions mutuelles de deux systèmes matériels forment un torseur nul.

$$\rightarrow \{F_{S1 \rightarrow S2}\} = -\{F_{S2 \rightarrow S1}\}$$

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer le PFD à l'ensemble (S1+S2), à (S1) seul et à (S2) seul :

$$\{m\vec{\gamma}_{S1+S2}\} = \{F_{ext \rightarrow S1+S2}\} \quad \text{actions extérieures au système (S1+S2)}$$

$$\{m\vec{\gamma}_{S1}\} = \{F_{ext \rightarrow S1}\} + \{F_{S2 \rightarrow S1}\} \quad \text{dans les actions extérieures à S1 interviennent les actions de S2} \rightarrow S1$$

$$\{m\vec{\gamma}_{S2}\} = \{F_{ext \rightarrow S2}\} + \{F_{S1 \rightarrow S2}\} \quad \text{dans les actions extérieures à S2 interviennent les actions de S1} \rightarrow S2$$

Par différence on trouve le Théorème de l'action - réaction : $\{F_{S1 \rightarrow S2}\} + \{F_{S2 \rightarrow S1}\} = \{0\}$

• Théorèmes généraux

Les théorèmes généraux traduisent l'égalité des éléments de réduction (résultante et moment en un point) des deux torseurs.

Les équations scalaires qui en découlent sont, par référence historique aux trois lois du mouvement, dites **équations de Newton**

$$3 \text{ équations de résultante : } \vec{R}_{Ext/\Sigma} = M\vec{\gamma}_g(G_\Sigma)$$

$$3 \text{ équations de moment : } \vec{M}_{Ext/\Sigma}(A) = \vec{\delta}_g(A, \Sigma)$$

Dans le cas d'un problème tridimensionnel nous obtenons au maximum 6 équations scalaires indépendantes (l'équation de moment peut donner trois équations scalaires par point considéré). Dans le cas d'un problème bidimensionnel nous obtenons 3 équations scalaires indépendantes.

• Théorème de l'énergie

Le théorème de l'énergie fournit une équation supplémentaire non indépendante des équations fournies par les théorèmes généraux. Cette équation peut s'avérer pratique à utiliser et peut dans certain cas (1 seule inconnue) donner directement la solution du problème.

Énoncé :

Dans un référentiel galiléen, pour tout système matériel considéré, la dérivée de l'énergie cinétique du système est égale à la puissance de **tous les efforts intérieurs et extérieurs** appliqués au système.

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma / Rg)) = P_{f_{int+ext}}$$

Démonstration : *importante elle montre comment interviennent les efforts intérieurs.*

Nous savons (cf chapitre 3 "actions mécaniques") que la puissance des quantités d'accélération est la dérivée de l'énergie cinétique.

Pour un solide indéformable appliquons le PFD et multiplions les deux membres par le torseur cinématique, nous obtenons donc la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}(E_c(S/Rg)) = P_{\text{ext}}$$

qui n'est autre que le théorème de l'énergie pour un solide indéformable car la puissance des efforts intérieurs à un solide indéformable est nulle.

Pour un système de solides, nous pouvons sommer les puissances pour chaque solide, dans les efforts extérieurs à chaque solide apparaîtront les efforts extérieurs au système appliqués au solide et les efforts de liaison des différents solides du système sur le solide considéré.

ce qui nous conduira à l'expression suivante : $\frac{d}{dt}\left(\sum_i E_c(S_i/Rg)\right) = \sum_i P_{\text{ext} \rightarrow S_i} + \sum_{j \neq i} P_{S_j \rightarrow S_i}$

soit : $\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/Rg)) = P_{\text{ext} \rightarrow \Sigma} + \sum_{j \neq i} P_{S_j \leftrightarrow S_i}$ c'est le théorème de l'énergie

En pratique les efforts sont classés en efforts donnés et en efforts de liaison (inconnues du problème). Et nous utiliserons lorsque c'est possible la notion d'énergie potentielle (cf chapitre 3 "actions mécaniques"). La forme développée du théorème de l'énergie est alors :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/Rg)) + \frac{d}{dt}(E_p(\text{poids ou ressorts})) = P_{\text{Liaisons}} + P_f \text{ ne dérivant pas d'un potentiel}$$

Attention : toutes les liaisons doivent être considérées

Précisons maintenant la notion de référentiel galiléen.

3 Référentiels galiléens

Comme leur noms l'indique c'est Galilée qui le premier¹ posa quelques questions gênantes pour l'époque (début du XVI^{ème} siècle), telle que :

- Comment se fait-il qu'une balle lâchée par un cavalier ne tombe pas à l'endroit où elle a été lâchée ? et pourquoi reste t'elle à la verticale du cheval (celui ci est supposé avancer à vitesse constante).
- Comment expliquer que des papillons volant dans une cabine de navire, continuent de voler indifféremment dans toutes les directions que le navire soit à l'arrêt ou qu'il se déplace et ceci quelque soit la vitesse du navire ?

De ces exemples et de bien d'autres observations, il introduisit le premier la notion de relativité en constatant qu'un mouvement uniforme est "comme nul", c'est à dire qu'il n'affecte pas la nature des choses qui en sont l'objet.

On peut s'étonner qu'il ait fallu attendre si longtemps pour que soit énoncé ce qui nous apparaît évident aujourd'hui, mais à l'époque ce principe mettait directement en cause les mouvements de la terre. Car il permettait d'imaginer que la terre tourne autour du soleil "comme le laissait entendre

¹ Il serait injuste d'oublier KEPLER qui effectua les premiers travaux dans ce domaine, mais il n'a pas su comme GALILEE diffuser ses observations sous une forme compréhensible par ses lecteurs.

COPERNIC" contrairement à cette impression d'immobilité que nous suggère l'expérience quotidienne.

Définition - propriété :

Le groupe de Galilée est l'ensemble des repères en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Pour ce groupe les lois de la mécanique sont invariantes

La démonstration est évidente si l'on utilise la formule de composition des accélérations puisque l'accélération de Coriolis et l'accélération relative sont toutes les deux nulles. **Les torseurs dynamiques par rapport à deux repères en translation uniforme l'un par rapport à l'autre sont donc équivalents.**

Remarque : la définition ne permet pas de définir de repère absolu

Une tentative consiste à appliquer le PFD à l'univers (rien de moins !). Pour l'univers il n'y a pas de force extérieure, le torseur dynamique de l'univers est donc nul.

- Le centre de masse "hypothétique" de l'univers est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme.
- et le moment cinétique de l'univers par rapport à ce centre de masse est constant.

Arrêtons de fumer et admettons que :

On ne peut pas définir de repère absolu.

Comme pour toute modélisation il faut faire des choix, ici le choix du repère que nous supposons galiléen et par rapport auquel nous allons poser le problème. Ce choix est fonction de la nature des phénomènes physiques que l'on doit étudier.

Exemples de repère :

Repère de Copernic (héliocentrique)

Ce repère est défini par le centre de masse du système solaire et trois directions définies par des étoiles "fixes". Considérer ce repère comme galiléen revient à négliger les forces extérieures au système solaire. Ceci semble légitime sachant que les étoiles les plus proches du système solaire sont à plus de 10^{15} Km. Les effets de l'attraction universelle seront donc négligeables. Ce repère doit être utilisé pour décrire le mouvement des planètes du système solaire.

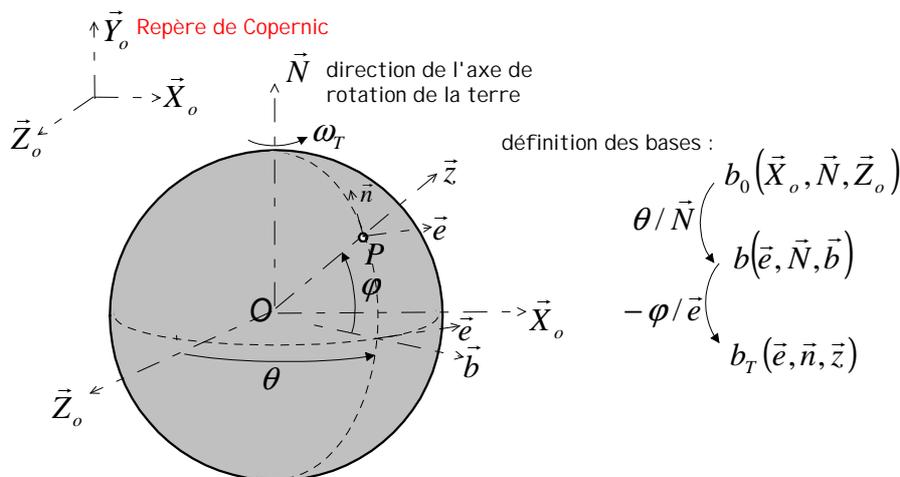
Repère géocentrique (repère céleste)

Ce repère est défini par le centre de masse de la terre et trois directions définies par des étoiles "fixes". Considérer ce repère comme galiléen revient à isoler la terre du système solaire (seul les effets de l'attraction terrestre seront pris en compte). Ce repère permet d'étudier les systèmes mécaniques au voisinage immédiat de la terre, il permet retrouver avec une excellente précision les résultats des expériences du XIX siècle telles que celle de la déviation vers l'est lors d'une chute libre, ou celle du pendule de Foucault.

Repère terrestre (repère pratique)

Ce repère est lié à la surface de la terre. En pratique le troisième axe du repère est relatif à la verticale du lieu et orienté vers le haut les deux premiers axes définissant le plan horizontal. Considérer ce repère comme galiléen revient à négliger les effets relatifs à la rotation de la terre.

Relation entre pesanteur et gravitation



On distingue les trois référentiels suivants : le référentiel de Copernic, le référentiel géocentrique (O,b₀), et le référentiel terrestre (P,b_T). L'axe de rotation de la terre est supposé conserver une direction fixe par rapport au référentiel de Copernic. Les notations utilisées sont \vec{n} pour la direction vers le nord géographique, \vec{e} vers l'est, (θ, φ) représentent la longitude et la latitude du point considéré à la surface de la terre. Enfin la vitesse de rotation de la terre sera notée : $\omega_T \cong 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rd} / \text{s}$

Considérons le simple problème du fil à plomb à l'équilibre, sa direction indique celle du champ de pesanteur terrestre.

Effectuons un bilan des efforts sur le plomb :

- T le tension dans le fil qui indiquera la verticale du lieu considéré.
- mG(T) le champ de gravitation de la terre dirigé suivant $-\vec{z}$
- mG(A) le champ de gravitation des autres astres que nous négligeons dans ce modèle.

Appliquons le PFD au plomb en considérant le repère terrestre comme galiléen

Le plomb est immobile par rapport à P $\rightarrow \vec{\gamma}_T(P) = \vec{0} \rightarrow -mG_{(T)}\vec{z} = \vec{T}$, dans ce modèle \vec{z} indique la verticale du lieu et le champ de pesanteur et l'attraction terrestre sont confondus.

Appliquons le PFD au plomb en considérant le repère géocentrique comme galiléen

Repérons la position du plomb par $\vec{OP} = R \vec{z}$

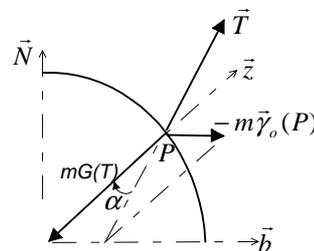
Par dérivation :

$$\vec{V}_o(P) = R\omega_T \vec{N} \wedge \vec{z} = R\omega_T \cos \varphi \vec{e}$$

$$\vec{\gamma}_o(P) = R\omega_T^2 \cos \varphi \vec{N} \wedge \vec{e} = -R\omega_T^2 \cos \varphi \vec{b}$$

Le PFD $\rightarrow -mG_{(T)}\vec{z} + \vec{T} = m\vec{\gamma}_o(P)$

Relation vectorielle représentée sur la figure ci-contre.



Nous en déduisons la valeur de l'angle α : $\sin \alpha = \frac{mR\omega_T^2 \cos \varphi \sin \varphi}{mG_{(T)} - mR\omega_T^2 \cos^2 \varphi}$

Or :

$$D'où \sin \alpha \cong \frac{R\omega_T^2 \cos \varphi \sin \varphi}{G_{(T)}}$$

$\cong 9,8 \text{ m/s}^2$

$R\omega_T^2 \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$

L'angle sera maximal pour $\varphi = 45^\circ$, on trouve $\alpha \cong 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \cong 6'$

Cet exemple montre que le champ de pesanteur est la somme du champ de gravitation terrestre et d'un champ centrifuge lié à l'accélération d'entraînement due à la rotation de la terre. L'effet centrifuge est nul au pôle, il est maximal à l'équateur. Le champ de pesanteur est donc maximal au pôle et minimal à l'équateur, ce qui explique la forme aplatie de notre planète.

Questions :

A quelle vitesse devrait tourner la terre pour annuler le champ de pesanteur à l'équateur ?

Réponse : 17 fois plus vite

La vitesse de rotation de la terre permet-elle d'expliquer le phénomène des marées ?

Réponse : non, il faut dans un premier temps tenir compte de l'attraction des autres astres, la lune a un effet 2 fois plus important que le soleil, et ces deux effets peuvent s'ajouter ou se contrarier, les autres astres ont des effets négligeables.

Les exemples suivants reprennent les expériences du XIX siècle qui ont mis en évidence les effets liés à l'accélération de Coriolis, démontrant ainsi le caractère non galiléen du repère terrestre : la déviation vers l'est lors d'une chute libre, et le pendule de Foucault

Dans ces exemples nous utilisons les bases et notations définies et introduites dans l'étude précédente.

Exemple 1

Déviations des graves vers l'est

Effectuons tout d'abord un calcul rapide

Ce calcul consiste à négliger les composantes horizontales de la vitesse par rapport à la vitesse de chute du corps $\vec{V} = -V \vec{z}$

La force due à l'accélération de Coriolis est donnée par :

$$\vec{f}_c = -m\vec{\gamma}_c = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{V} = 2m\omega_T V \vec{N} \wedge \vec{z} = 2m\omega_T V \cos \varphi \vec{e}$$

donc toujours dirigée vers l'est

Le PFD appliqué au point matériel en chute libre nous donne donc en première approximation :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega_T \dot{z} \cos \varphi \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales "lâché sans vitesse d'une hauteur h", la dernière équation nous donne :

$$V = -\dot{z} = gt, \text{ et } z = h - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \text{temps de chute } T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Reportons ces résultats dans la première équation :

$$\dot{x} = \omega_T gt^2 \cos \varphi \rightarrow x = \frac{1}{3}\omega_T gt^3 \cos \varphi \text{ d'où la déviation pour } t = T$$

Application, pour une chute de 68m à la latitude $48^\circ 51'$ (expérience au panthéon) la durée de chute est $T = 3,72 \text{ s}$, et la déviation de l'ordre de 8mm.

Le calcul précédent paraît à la fois simple et juste, mais il néglige de nombreux termes car il n'est pas si facile de découpler vitesse et accélération.

Effectuons un calcul complet

Le repère supposé galiléen est le repère géocentrique (O, b_0) , défini précédemment. Calculons l'accélération du point P par rapport à ce repère.

$$\vec{OP} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ R+z \end{Bmatrix}_{bT}, \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{bT} = \omega_T \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}_{bT}$$

$$\text{d'où } \vec{V}_o(P) = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{bT} + \omega_T \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}_{bT} \wedge \begin{Bmatrix} x \\ y \\ R+z \end{Bmatrix}_{bT} = \begin{Bmatrix} \dot{x} + \omega_T(R+z)\cos\varphi - \omega_T y \sin\varphi \\ \dot{y} + \omega_T x \sin\varphi \\ \dot{z} - \omega_T x \cos\varphi \end{Bmatrix}_{bT}$$

$$\text{et } \vec{\gamma}_o(P) = \begin{Bmatrix} \ddot{x} + 2\omega_T \dot{z} \cos\varphi - 2\omega_T \dot{y} \sin\varphi - \omega_T^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega_T \dot{x} \sin\varphi + \omega_T^2(R+z)\cos\varphi \sin\varphi - \omega_T^2 y \sin^2\varphi \\ \ddot{z} - 2\omega_T \dot{x} \cos\varphi - \omega_T^2(R+z)\cos^2\varphi + \omega_T^2 y \cos\varphi \sin\varphi \end{Bmatrix}_{bT}$$

en ne conservant que les termes d'ordre 1 en ω_T , le PFD nous donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_T \dot{z} \cos\varphi - 2\omega_T \dot{y} \sin\varphi = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega_T \dot{x} \sin\varphi = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega_T \dot{x} \cos\varphi = -g \end{cases}$$

Compte tenu des conditions initiales :

$$\text{l'équation (2)} \rightarrow \dot{y} = -2\omega_T x \sin\varphi$$

$$\text{l'équation (3)} \rightarrow \dot{z} = 2\omega_T x \cos\varphi - gt$$

$$\text{d'où l'équation du mouvement en } x : \ddot{x} + 4\omega_T^2 x = 2\omega_T \cos\varphi gt$$

les solutions de cette équation sont de la forme :

$$x = A \cos 2\omega_T t + B \sin 2\omega_T t + \frac{\cos\varphi}{2\omega_T} gt$$

$$\text{les conditions initiales} \rightarrow A = 0 \text{ et } B = -\frac{\cos\varphi}{4\omega_T^2} g$$

$$\text{d'où } x = g \frac{\cos\varphi}{2\omega_T} \left(t - \frac{1}{2\omega_T} \sin 2\omega_T t \right)$$

En effectuant un développement limité du sinus à l'ordre 3, nous retrouvons la solution simplifiée :

$$x \cong \frac{1}{3} \omega_T g t^3 \cos\varphi$$

puis en reportant dans les expressions de y et z

$$\dot{y} = -\frac{2}{3} g \cos\varphi \sin\varphi \omega_T^2 t^3 \text{ ce terme est d'ordre 2} \rightarrow y \cong 0$$

$$\dot{z} = -gt + \frac{2}{3} g \cos\varphi \omega_T^2 t^3 \text{ le terme d'ordre 2 peut être négligé}$$

$$\rightarrow \text{le temps de chute } T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ et la déviation vers l'est est de } \frac{2}{3} h \cos\varphi \omega_T \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Le calcul complet est beaucoup plus long mais il permet de contrôler le niveau des approximations successives qu'il faut faire, pour simplifier l'expression de l'accélération.

Exemple 2

Pendule de Foucault

Analyse simplifiée

Le comportement du pendule est simple à analyser au pôle nord, en effet il oscillera dans un plan déterminé par rapport au référentiel géocentrique. Ce plan tourne donc autour de l'axe polaire d'est en ouest avec une période de 24h.

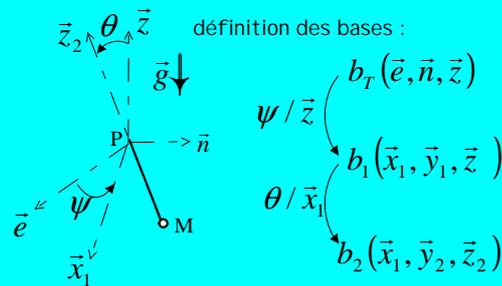
A l'équateur le plan des oscillations est fixe, et en un lieu de latitude φ la contribution verticale du vecteur rotation de la terre est $\omega_T \sin \varphi$ d'où la

$$\text{période de révolution du pendule } T = \frac{2\pi}{\omega_T \sin \varphi}$$

Analyse complète

Les calculs de cinématiques sont assez longs

Effectuons dans un premier temps la mise en équation du pendule par rapport au repère terrestre:



Le problème comporte 3 inconnues :

2 paramètres pour décrire les mouvements du pendule (ψ, θ),

1 effort de liaison la tension T dans le fil.

Le problème est bien posé car nous pouvons écrire 3 équations par le PFD

Calculons l'accélération du point M par rapport au repère terrestre. Pour simplifier les expressions nous supposons dès à présent que l'angle θ reste petit, ce qui est conforme à la situation expérimentale.

$$\vec{V}_{b_T}(M) = \vec{\Omega}_{Tb_2} \wedge \vec{PM} \quad \text{avec} \quad \vec{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}_{b_2}, \quad \vec{\Omega}_{Tb_2} \cong \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\theta \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{b_2}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{V}_{b_T}(M) \cong \begin{pmatrix} -l\dot{\psi}\theta \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{b_2} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_{b_T}(M) \cong \begin{pmatrix} -l\ddot{\psi}\theta - 2l\dot{\psi}\dot{\theta} \\ l\ddot{\theta} - l\dot{\psi}^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{b_2}$$

Nous ne détaillons pas les calculs de la dérivation vectorielle

$$\text{D'où les équations du PFD : } \begin{cases} -l\ddot{\psi}\theta - 2l\dot{\psi}\dot{\theta} \cong 0 \\ l\ddot{\theta} - l\dot{\psi}^2\theta \cong -g\theta \\ 0 \cong T - g \end{cases}$$

La première équation entraîne : $\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi = cte$

L'équation du mouvement en θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \text{correspond à des oscillations de période } 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ce modèle basé sur l'hypothèse que le repère terrestre est un référentiel galiléen ne permet pas de retrouver le mouvement de rotation du plan d'oscillation du pendule, par contre l'équation du mouvement correspondant aux oscillations du pendule est conforme à l'expérience.

Analyse par rapport au repère géocentrique

Les calculs de cinématiques sont longs, nous utiliserons les résultats obtenus précédemment

$$\text{Partons de } \vec{\gamma}_o(M) = \frac{d_o^2}{dt^2}(\overrightarrow{OM}) \text{ avec } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

Les termes correspondant à OP ont déjà été calculé et sont du second ordre en ω_T

$$\frac{d_o}{dt}(\overrightarrow{PM}) = \bar{\Omega}_{Ob2} \wedge \overrightarrow{PM} \text{ avec } \bar{\Omega}_{Ob2} = \omega_T \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}_{bT} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \theta \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{b2}$$

en effectuant le changement de base

$$\bar{\Omega}_{Ob2} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} + \omega_T \cos \varphi \sin \psi \\ (\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi) \theta + \omega_T \cos \varphi \cos \psi \\ \dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi - \omega_T \cos \varphi \cos \psi \theta \end{Bmatrix}_{b2}$$

$$\text{d'où } \frac{d_o}{dt}(\overrightarrow{PM}) \cong \begin{Bmatrix} -\ell(\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi) \theta - \ell \omega_T \cos \varphi \cos \psi \\ \ell \dot{\theta} + \ell \omega_T \cos \varphi \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix}_{b2}$$

$$\text{et } \frac{d_o^2}{dt^2}(\overrightarrow{PM}) \cong \begin{Bmatrix} -\ell \ddot{\psi} \theta - 2\ell(\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi) \dot{\theta} \\ \ell \ddot{\theta} - \ell(\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi)^2 \theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{b2}$$

Nous ne détaillons pas les calculs et le développement limité en ω_T et θ

$$\text{D'où les équations du PFD : } \begin{cases} -\ell \ddot{\psi} \theta - 2\ell(\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi) \dot{\theta} \cong 0 \\ \ell \ddot{\theta} - \ell(\dot{\psi} + \omega_T \sin \varphi)^2 \theta \cong -g \theta \\ 0 \cong T - g \end{cases}$$

La première équation entraîne : $\dot{\psi} = -\omega_T \sin \varphi = cte$

La seconde redonne l'équation des oscillations du pendule.

Nous retrouvons maintenant les résultats expérimentaux rotation du plan d'oscillation du pendule à vitesse constante $-\omega_T \sin \varphi$.

En conclusion, retenons les résultats importants suivants:

La formulation des lois de la mécanique est invariante dans tout changement de référentiel en translation les uns par rapport aux autres (groupe de Galilée).

Le champ de pesanteur est en fait une combinaison du champ de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la terre. Il est maximum au pôle et minimum à l'équateur.

Pour expliquer des expériences fines il faut tenir compte des effet de rotation de la terre (effet de Coriolis), mais pour une grande majorité de problème de mécanique industrielle (vitesse inférieure à

700m/s) un simple repère terrestre est heureusement suffisant pour effectuer la mise en équations.

Dans la suite de ce cours nous nous placerons dans cette hypothèse et nous considérerons qu'un simple référentiel terrestre constitue une excellente approximation d'un référentiel galiléen.

4 Recherche des équations principales

L'analyse d'un problème mécanique est pour l'ingénieur la partie la plus délicate et la plus difficile à réaliser car elle porte sur la modélisation du comportement physique du système mécanique à étudier. Il faut faire des choix et ce sera toujours un compromis entre la réalité et la possibilité de traiter le problème avec les outils dont on dispose. A ce titre les exemples précédents ont bien montré les difficultés liées au choix du référentiel galiléen, pour des problèmes simples ne traitant que de la dynamique d'un point matériel. Nous allons maintenant étudier les systèmes mécaniques plus complexes constitués de plusieurs solides reliés entre eux par des liaisons mécaniques.

- Analyse du problème

Avant toute étude de mécanique, il est indispensable de faire un bilan des inconnues et des équations que l'on peut écrire. Ce n'est qu'à partir de cette analyse qu'il sera possible de commencer la mise en équations puis l'étude du problème.

Dans le chapitre 3 "Actions mécaniques" nous avons vu que les actions mécaniques peuvent toutes être modélisées par un champ de vecteur lié que nous représentons par un torseur. Ces efforts sont soit des données (champs ou efforts appliqués au système) soit des inconnues du problème et ces efforts inconnus correspondent aux liaisons cinématiques (déplacements ou vitesses imposées).

Les inconnues d'un problème de mécanique sont donc uniquement de deux types :

- les inconnues cinématiques ou paramètres du mouvement
- les inconnues associées aux efforts de liaison

propriété :

Pour tout système mécanique si les liaisons sont parfaites et matériellement indépendantes (non surabondantes), les théorèmes généraux permettront d'écrire autant d'équations que d'inconnues.

Le théorème de l'énergie fournira alors une équation supplémentaire non indépendante des précédentes.

D'abord utilisée en statique cette propriété a donné la définition des **systèmes isostatiques et hyperstatiques**. On ne peut traiter dans le cadre de la mécanique des solides indéformables que le cas des **systèmes isostatiques**. Toute liaison hyperstatique entraînera des déformations du système mécanique qui ne peuvent être prises en compte que dans le cadre de la mécanique des milieux continus qui tient compte des déformations des corps (poutres, coques, etc...).

Nous pouvons dans le cadre de la mécanique des solides indéformables modéliser ces déformations en introduisant des ressorts. Ces modèles élémentaires peuvent s'avérer suffisant et très utiles pour représenter le comportement dynamique du système, par exemple l'étude dynamique d'une suspension.

ANALYSE: En résumé l'analyse d'un problème mécanique doit aborder les points suivants

Choix du repère galiléen (fonction des phénomènes à prendre en compte)

Définition du système à étudier

- définition des différents éléments du système mécanique (solides)
- modélisation des efforts imposés au système (pesanteur, pressions)
- modélisation des liaisons élastiques (ressorts)

Modélisation des liaisons

- Aspect cinématique → paramétrage (choix des inconnues cinématique)
- Aspect physique → efforts de liaison

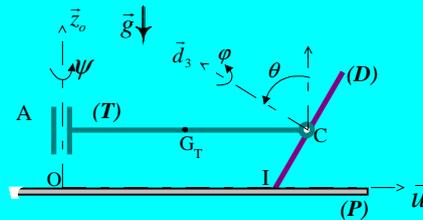
Le choix des paramètres du mouvement est capital car il conditionne les calculs de cinématique et de cinétique qui suivent. Lors de la modélisation des efforts de liaison il sera nécessaire de remplacer les liaisons hyperstatiques par des liaisons cinématiquement équivalentes.

À la fin de l'analyse vous devez pouvoir présenter un bilan "équations - inconnues" équilibré.

Exemple 3

Le système mécanique (Σ) que l'on veut étudier est constitué de 2 solides

- une tige (T) de longueur $2a$, de masse $3m$ et de centre de masse G_T ,
- un disque (D) de rayon a , de masse $4m$ et de centre de masse C.



représentation du système dans le plan \vec{n}^\perp , le repère $(A, \vec{n}, \vec{u}, \vec{z}_o)$ est lié à (T)

La tige (T) horizontale est liée à l'axe vertical par une liaison pivot glissant supposée parfaite. La liaison entre (T) et (D) permet d'assurer :

- d'une part, l'inclinaison de (D) par rapport à la verticale (rotation θ autour de (C, \vec{n})) ;
- d'autre part, la rotation propre φ du disque autour de son axe de révolution (C, \vec{d}_3) .

Le disque reste en contact en I avec un plateau horizontal situé dans le plan $(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o)$, le contact à lieu sans frottement.

Le repère d'observation $R_o(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ est supposé galiléen, et le système est soumis à l'action du champ de pesanteur défini par $\vec{g} = -g \vec{z}_o$.

Analyse

Les données du problème répondent déjà aux deux premiers points: choix du référentiel galiléen, et définition du système. Nous allons donc aborder directement la modélisation des liaisons pour dénombrer nos inconnues.

En A : pivot glissant: 2 mobilités : (z_A, ψ) 4 inconnues efforts :
$$\begin{cases} \vec{R}_A \cdot \vec{z}_o = 0 \\ \vec{M}_A \cdot \vec{z}_o = 0 \end{cases}$$

En C : rotule à doigt: 2 mobilités : (θ, φ) 4 inconnues efforts :
$$\begin{cases} \vec{R}_C \\ \vec{M}_C = M_C \vec{v} \end{cases}$$

En I : contact ponctuel (cette liaison réalise une fermeture de boucle cinématique)

1 équation de fermeture, et 1 inconnue effort : $\vec{R}_I = N \vec{z}_o$

Bilan :4-1 = 3 paramètres nous conserverons (ψ, θ, φ)

9 inconnues efforts de liaison.

Le problème est bien posé car nous pouvons écrire 12 équations (6 pour chaque solide)

- Recherche des équations du mouvement

Dans la mesure où l'on ne cherche que le mouvement du système, il n'est pas utile de déterminer les actions de liaison. L'analyse consiste donc à chercher des équations ne faisant apparaître aucune inconnue de liaison. Pour pouvoir résoudre il faut trouver autant d'équations a priori indépendantes qu'il y a d'inconnues cinématiques, mais ce n'est pas toujours possible.

Si on ne peut pas trouver autant d'équations du mouvement qu'il y a de paramètres, il faut alors chercher à faire apparaître le moins possible d'inconnues secondaires. Et écrire un nombre équivalent d'équations déduites des théorèmes généraux ou du théorème de l'énergie.

Le choix des systèmes que l'on peut isoler pour écrire le PFD a pour objectif de faire apparaître des directions ou axes privilégiés sur lesquels la projection du PFD conduira à l'écriture d'une équation ne faisant apparaître que des inconnues principales, il faut donc :

Pour chaque système considéré

- effectuer un bilan des efforts extérieurs sur ce système
une figure vous aidera à voir (trouver) la ou les directions privilégiées
- justifier votre choix (analyse vectorielle)
- donner la forme vectorielle de votre équation principale.

Exemple 4

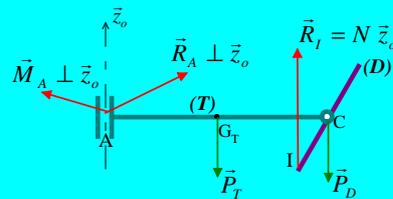
Reprenons le système mécanique de l'exemple 3.

Nous avons déjà analysé ce problème et les mouvements du système dépendent de 3 paramètres (ψ, θ, φ) , nous allons maintenant chercher si il est possible de trouver autant d'équations du mouvement pour ce système en utilisant que les théorèmes généraux.

Analyse

L'objectif est d'extraire 3 équations principales parmi les 18 possibles (Σ, T, D)

Isolons Σ : nous faisons apparaître 5 composantes inconnues d'effort de liaison, 4 en A et 1 en I



efforts extérieurs donnés et inconnus agissant sur Σ

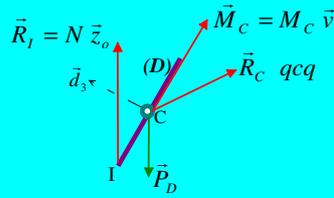
Quelque soit la direction le TH des résultantes fera donc apparaître une composante inconnue d'effort.

Par contre le moment en A des efforts extérieurs est nul en projection sur la direction \vec{z}_o car les poids et la réaction en I sont parallèles à \vec{z}_o .

Nous obtenons donc une équation du mouvement pour Σ : $\vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = 0$ (1)

Remarque : il n'existe aucun autre axe privilégié pour ce système, en A \vec{z}_o et la seule direction possible. En un autre point soit M_A soit R_A apparaissent dans les équations.

Isolons D : nous faisons apparaître 4 nouvelles composantes inconnues d'effort en C (+ 1 en I)



efforts extérieurs donnés et inconnus agissant sur D

Remarque les efforts de liaison en C représentent les actions de (T) sur (D)

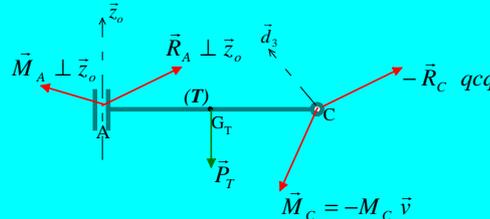
Quelque soit la direction le TH des résultantes fera donc apparaître une composante inconnue d'effort.

Par contre le moment en C des efforts extérieurs est nul en projection sur la direction \vec{d}_3 car la réaction en I coupe l'axe (C, \vec{d}_3) .

Nous obtenons donc une équation du mouvement pour D: $\boxed{\vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{d}_3 = 0}$ (2)

Remarque : il n'existe pas d'autre équation du mouvement pour le disque, par contre la direction (C, \vec{n}) est une direction privilégiée elle ne fera apparaître que l'effort inconnu N.

Isolons T : nous faisons pas apparaître de nouvelles composantes inconnues d'effort



efforts extérieurs donnés et inconnus agissant sur T

les efforts de liaison en C représentent maintenant les actions de (D) sur (T)

Il est visible que quelque soit la direction ou le point les TH généraux ne fourniront pas d'équation du mouvement lorsque l'on isole la tige.

Bilan

Nous ne pouvons trouver que 2 équations du mouvement pour ce système mécanique. Il faut donc chercher d'autres équations en faisant apparaître un minimum de composante d'efforts inconnus.

Équations secondaires

Nous avons remarqué, en isolant le disque qu'il était possible d'écrire une équation de moment ne faisant intervenir que l'inconnue effort N. Prenons pour commencer N comme inconnue secondaire, nous cherchons donc à obtenir 2 équations supplémentaires

Pour D : nous avons l'équation de moment en C, en projection sur \vec{n}

$$\boxed{\vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{n} = -Na \cos \theta} \quad (3)$$

Pour Σ : L'équation de résultante en projection sur \vec{z}_o ne fait apparaître que la composante inconnue N, nous avons donc :

$$\boxed{7m \vec{\gamma}_o(G_\Sigma) \cdot \vec{z}_o = -7mg + N} \quad (4)$$

Conclusion

Les 3 équations du mouvement de ce système obtenues par le PFD sont:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = 0 \\ \vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{d}_3 = 0 \\ \vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{n} + 7m(g + \vec{\gamma}_o(G_\Sigma) \cdot \vec{z}_o) a \cos \theta = 0 \end{cases}$$

L'équation $N = 7m(g + \vec{\gamma}_o(G_\Sigma) \cdot \vec{z}_o)$ permet de calculer l'effort inconnu N

Il ne reste qu'à effectuer les calculs de cinématique et cinétique.

Remarque : le théorème de l'énergie appliqué au système complet nous donne une équation du mouvement supplémentaire non indépendante des 3 précédentes.

• intégrales premières du mouvement

Lorsque le système est libre dans le champ de pesanteur (réponse à des conditions initiales données) les équations du mouvement traduisent souvent la conservation d'une grandeur physique au cours du mouvement (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie mécanique). Ces équations de conservation sont des intégrales premières du mouvement, il faut savoir les détecter car elle sont plus simple à écrire et ce sont des équations différentielle du premier ordre qui pour les problèmes simples conduisent à une équation principale de la forme $\dot{q}^2 = f(q)$ que l'on peut résoudre analytiquement ou graphiquement.

La recherche d'intégrales premières du mouvement se mène de façon similaire à la recherche des équations du mouvement, mais on utilise ensuite les propriétés relatives aux calculs de cinétiques pour donner directement la forme primitive de l'équation différentielle déduite du PFD.

Dans ce qui suit nous ne présentons que le cas où les seconds membres sont nuls (il n'y a pas de chargement autre que celui du champ de pesanteur). Le repère d'observation R_o est supposé galiléen.

Intégrale première de résultante

Si il existe une direction \vec{u} telle que $\vec{R}_{\text{ext}/\Sigma} \cdot \vec{u} = 0$

nous avons une équation du mouvement dans la direction \vec{u} : $\vec{\gamma}_g(G_\Sigma) \cdot \vec{u} = 0$

Si de plus \vec{u} est une direction fixe de R_o , nous avons : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_o(G) \cdot \vec{u}) = \vec{\gamma}_o(G) \cdot \vec{u}$

D'où $\vec{V}_o(G_\Sigma) \cdot \vec{u} = Cte$ c'est une intégrale première du mouvement.

$$\frac{d_o \vec{u}}{dt} = 0$$

Remarque : en général ce type d'intégrale première est obtenue pour des directions orthogonales au champ de pesanteur.

Intégrale première de moment

S'il existe un axe (A, \vec{u}) tel que $\vec{M}_{\text{ext}/\Sigma}(A) \cdot \vec{u} = 0$

nous avons une équation du mouvement $\vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{u} = 0$

S'il existe un point A de l'axe (A, \vec{u}) tel que $(\vec{V}_o(A) \wedge \vec{V}_o(G_\Sigma)) \cdot \vec{u} = 0$

alors $\vec{\delta}_o(A, S) \cdot \vec{u} = \frac{d(\vec{\sigma}_o(A, S) \cdot \vec{u})}{dt} - \vec{\sigma}_o(A, S) \cdot \frac{d_o(\vec{u})}{dt}$

Si de plus \vec{u} est une direction fixe alors $\vec{\delta}_o(A, S) \cdot \vec{u} = \frac{d(\vec{\sigma}_o(A, S) \cdot \vec{u})}{dt}$

D'où $\vec{\sigma}_o(A, S) \cdot \vec{u} = Cte$ c'est une intégrale première du mouvement.

Remarque : si la direction est celle du champ de pesanteur l'intégrale première est dite IP des aires.

Cas particulier pour un solide ayant un opérateur d'inertie de révolution

Si $\vec{M}_{\text{Ext}/S}(A) \cdot \vec{u} = 0$ avec (A, \vec{u}) axe de révolution pour l'opérateur d'inertie du solide S, le centre de masse du solide appartient nécessairement l'axe, nous pouvons donc calculer le moment dynamique en appliquant les formules d'Euler (cf chapitre de cinétique).

Nous obtenons l'intégrale première d'Euler : $\vec{\Omega}_{\text{os}} \cdot \vec{u} = Cte$

Remarque : l'intégrale première d'Euler traduit le fait qu'un solide dynamiquement équilibré par rapport à son axe de rotation, conserve une vitesse de rotation constante suivant cet axe, ceci quelque soit la direction de l'axe, si rien ne s'oppose au mouvement de rotation (pivot parfait).

Intégrale première de l'énergie

Cette intégrale première est déduite du **théorème de l'énergie appliqué au système complet**.

Si toutes les liaisons intérieures et celles avec R_o sont supposées parfaites, leur puissance sera nulle car elles sont respectées par le paramétrage.

Si de plus les seuls efforts donnés dérivent d'un potentiel le théorème de l'énergie appliqué au système se réduit à :

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/Rg)) + \frac{d}{dt}(E_p(\Sigma)) = 0$$

Soit : $E_c(\Sigma/Rg) + E_p(\Sigma) = Cte$ c'est l'intégrale première de l'énergie

Exemple 5

Reprenons le système mécanique des exemples 3 et 4.

Nous avons obtenu les équations du mouvement du système, nous regardons maintenant s'il est possible de les mettre sous forme d'intégrales première du mouvement.

Rappel

Les 3 équations du mouvement de ce système obtenues par le PFD sont:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = 0 \\ \vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{d}_3 = 0 \\ \vec{\delta}_o(C, D) \cdot \vec{n} + 7m(g + \vec{\gamma}_o(G_\Sigma) \cdot \vec{z}_o)a \cos \theta = 0 \end{cases}$$

De plus nous avons l'équation déduite du théorème de l'énergie

$$\frac{d}{dt}(E_c(\Sigma/Rg)) + \frac{d}{dt}(E_p(\Sigma)) = 0$$

intégrales premières

La dernière équation s'intègre à vue et donne $E_c(\Sigma/Rg) + E_p(\Sigma) = Cte$

c'est l'intégrale première de l'énergie

La première équation est une équation de moment par rapport à l'axe (O, \vec{z}_o) , or

c'est un axe fixe de R_0 (O point fixe et \vec{z}_o direction fixe), nous avons donc :

$$\vec{\sigma}_o(O, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = Cte$$

c'est l'intégrale première des aires

La seconde équation est une équation de moment par rapport à l'axe (C, \vec{d}_3) axe de révolution du disque et C est le centre de masse du disque, nous avons donc :

$$\vec{\sigma}_o(C, D) \cdot \vec{d}_3 = Cte$$

c'est l'intégrale première d'Euler

Nous venons d'identifier 3 intégrales premières du mouvement, les constantes d'intégration seront définies à l'instant initial pour lequel la position et l'état des vitesses sont supposés connus.

Écriture des équations

Nous ne détaillons pas les calculs de cinétique, c'est à vous de les effectuer

$$(3) \rightarrow \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = Cte = r_o$$

$$(2) \rightarrow \dot{\psi} [20 + \sin^2 \theta] + 2r_o \cos \theta = Cte = k$$

$$(1) \rightarrow \dot{\theta}^2 (1 + 7 \cos^2 \theta) + \dot{\psi}^2 (20 + \sin^2 \theta) + 2r_o^2 + 14 \frac{g}{a} \sin \theta = Cte$$

Notez que nous avons écrit les équations de la plus simple vers la plus compliquée ce qui nous permet de tenir compte des résultats obtenus.

La dernière équation peut se simplifier en passant r_o dans la constante

$$\dot{\theta}^2 (1 + 7 \cos^2 \theta) + \dot{\psi}^2 (20 + \sin^2 \theta) + 14 \frac{g}{a} \sin \theta = Cte = h$$

La seconde équation (2) nous donne :
$$\dot{\psi} = \frac{k - 2r_o \cos \theta}{20 + \sin^2 \theta}$$

En reportant dans la dernière (1) :

$$\dot{\theta}^2 (1 + 7 \cos^2 \theta) = h - 14 \frac{g}{a} \sin \theta - \frac{[k - 2r_o \cos \theta]^2}{20 + \sin^2 \theta}$$

Cette équation différentielle non linéaire ne dépend plus que de θ , et il existe des méthodes analytiques et graphiques pour traiter ce type d'équation dite à paramètre principal de la forme $\dot{q}^2 = f(q)$.

Les constantes seront déterminées à l'état initial :

$$r_o = \dot{\psi}_o \cos \theta_o + \dot{\phi}_o$$

$$k = \dot{\psi}_o [20 + \sin^2 \theta_o] + 2r_o \cos \theta_o$$

$$h = \dot{\theta}_o^2 (1 + 7 \cos^2 \theta_o) + \dot{\psi}_o^2 (20 + \sin^2 \theta_o) + 14 \frac{g}{a} \sin \theta_o$$

- Calcul d'efforts

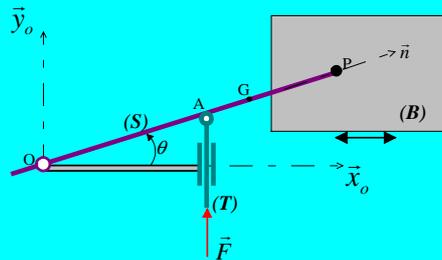
Lorsque les équations du mouvement sont connues, les théorèmes généraux donnent des relations entre les composantes des actions mécaniques extérieures au système considéré. Nous pourrons

ainsi accéder au calcul de tous les efforts inconnus associés aux liaisons soit avec le bâti soit intérieures en isolant les différents éléments du système mécanique. De même que pour la recherche des équations du mouvement l'analyse consiste à chercher les équations ne faisant apparaître que les inconnues de liaison que l'on cherche à déterminer, en cherchant à faire apparaître le moins possible d'inconnues secondaires.

Le théorème de l'énergie peut être utilisé, il ne donnera qu'une équation et fera apparaître la puissance de **tous** les efforts. Il peut cependant être très utile pour trouver rapidement la puissance d'un actionneur.

Exemple 6

Étude dynamique de l'équipement mobile d'un appareil enregistreur. Le bras (S) porte en P un stylet qui reste en contact avec la bande d'enregistrement (B). Les mouvements du bras dans le plan horizontal (O, \vec{x}_o, \vec{y}_o) sont commandés par une tige (T) guidée en translation par rapport au boîtier de l'appareil.



Vue de dessus de l'appareil

Dans cette étude, on s'intéresse uniquement aux mouvements et aux efforts dans le plan, le frottement du stylet sur la feuille de papier est négligé.

Quelles doivent être les mobilités de la liaison en O pour que ce mécanisme fonctionne.

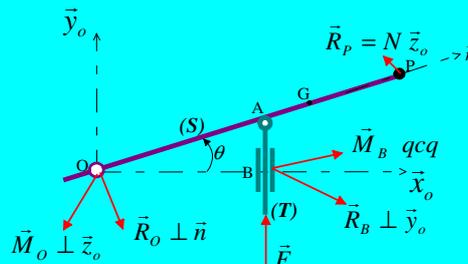
Quel est l'effort nécessaire pour imposer les mouvements de la tige.

Paramétrage:

Le mouvement du point A est imposé par la tige guidée en translation suivant \vec{y}_o , pour que le mécanisme fonctionne il faut que la liaison en O autorise 2 mobilités, une rotation θ et une translation suivant \vec{n} .

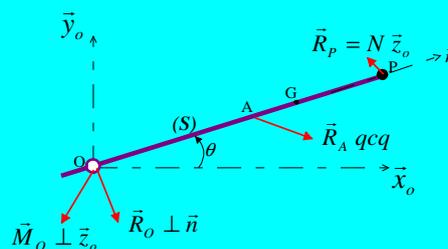
Pour d'écrire les mouvements de la tige nous conserverons l'angle θ

Bilan des efforts sur (Σ):



Seules les composantes dans le plan (O, \vec{x}_o, \vec{y}_o) nous intéressent, nous avons donc 4 inconnues (Y_o, X_B, M_B, F) pour 3 équations. Et il n'existe pas d'équation principale ne faisant apparaître que la composante F , isolons (S) pour voir.

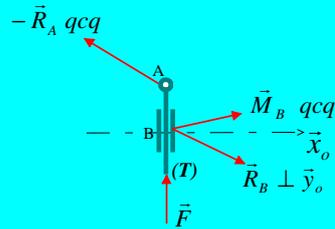
Bilan des efforts sur (S):



On fait apparaître 2 inconnues supplémentaires en A. pour 3 équations. Le bilan

inconnues - équation est équilibré. Mais il n'y a pas plus d'équation principale, considérons (T) pour voir.

Bilan des efforts sur (T):



Recherche de solution

Pour (Σ) en projection sur \vec{y}_o le Théorème des résultantes donne :

$$M_{\Sigma} \vec{\gamma}_o(G_{\Sigma}) \cdot \vec{y}_o = \vec{R}_O \cdot \vec{y}_o + F$$

posons $\vec{R}_O = Y_O \vec{u}$ Y_O est une inconnue secondaire pour notre problème

$$M_{\Sigma} \vec{\gamma}_o(G_{\Sigma}) \cdot \vec{y}_o = Y_O \cos \theta + F$$

Cherchons une seconde équation ne faisant apparaître que Y_O et F

Pour (S) le Théorème des moments en A donne :

$$\vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = (\vec{R}_O \wedge \vec{OA}) \cdot \vec{z}_o$$

posons $\vec{OA} = \lambda \vec{n}$ avec λ qui s'exprime en fonction de θ : $\cos \theta = d / \lambda$

$$\vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o = -Y_O \lambda$$

$$\text{finalement : } F = \vec{\delta}_o(A, \Sigma) \cdot \vec{z}_o \frac{\cos^2 \theta}{d} + M_{\Sigma} \vec{\gamma}_o(G_{\Sigma}) \cdot \vec{y}_o$$

Beaucoup plus simple

En fait il suffisait d'appliquer le théorème de l'énergie au système complet. Toutes les liaisons sont supposées parfaites donc la puissance des liaisons sera nulle car le paramétrage utilisé les respectent. Il ne reste donc que la puissance de F au second membre.

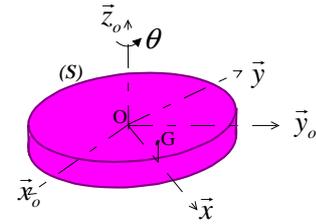
$$\frac{d}{dt} (E_c(\Sigma / Rg)) = F \dot{y} \quad \text{avec } y = d \tan \theta$$

5 Applications

• Équilibrage d'un rotor

Un équilibrage défectueux engendre des sollicitations dynamiques pouvant être importantes au niveau des liaisons de l'arbre (paliers). Ces vibrations sont source de bruits, de gêne à l'utilisation, et peuvent aller jusqu'à la détérioration du matériel par fatigue. Citons par exemples les bonds désordonnés d'une essoreuse à salade, les sollicitations sur le tambour d'une machine à laver le linge, les vibrations dans le volant lorsque les roues sont mal équilibrées.

Pour éliminer ces sollicitations il faut procéder à l'équilibrage du système. Traitons le cas d'un solide (S) à priori quelconque tournant autour d'un axe fixe (O, z_o). La liaison avec le bâti est modélisée par un pivot d'axe (O, z_o) supposé parfait.



Posons :

Caractéristiques mécaniques du solide : $\vec{OG} = d \vec{x} + c \vec{z}_o$, $I(O, b, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$

Torseur des efforts de liaison en O : ${}^b\{\vec{R}\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$, ${}^b\{\vec{M}\} = \begin{Bmatrix} L \\ M \\ 0 \end{Bmatrix}$

Couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{z}_o$ qui permet d'imposer la vitesse de rotation du solide.

Appliquons le PFD : $\begin{cases} \vec{R} = M \vec{\gamma}_o(G) \\ \vec{M} = \vec{\delta}_o(O, S) \end{cases}$

Avec : $\vec{V}_o(G) = d \dot{\theta} \vec{y} \Rightarrow \vec{\gamma}_o(G) = d \ddot{\theta} \vec{y} - d \dot{\theta}^2 \vec{x}$

et ${}^b\{\vec{\sigma}_o(O, S)\} = \begin{Bmatrix} -E \dot{\theta} \\ -D \dot{\theta} \\ C \dot{\theta} \end{Bmatrix} \Rightarrow {}^b\{\vec{\delta}_o(O, S)\} = \begin{Bmatrix} -E \ddot{\theta} + D \dot{\theta}^2 \\ -D \ddot{\theta} - E \dot{\theta}^2 \\ C \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$

nous ne détaillons pas les calculs de dérivation vectorielle.

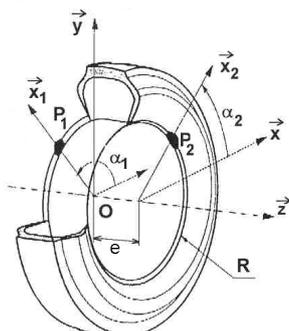
Nous obtenons les efforts de liaison et le couple moteur : $\begin{cases} X = -md \dot{\theta}^2 \\ Y = md \ddot{\theta} \\ Z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} L = -E \ddot{\theta} + D \dot{\theta}^2 \\ M = -D \ddot{\theta} - E \dot{\theta}^2 \\ \Gamma = C \ddot{\theta} \end{cases}$

L'équilibrage consiste à rendre ces efforts indépendant des mouvements en θ , il faut donc satisfaire les conditions suivantes :

- d=0 "G doit appartenir à l'axe de rotation du solide"
- D=E=0 "l'axe de rotation doit être principal d'inertie"

Remarque : le calcul simplifié que nous venons de faire, ne traite que des mouvements de rotation par rapport à un axe fixe. Pour un mouvement quelconque, il faut rendre l'opérateur d'inertie de révolution par rapport à l'axe de rotation si l'on veut que la composante de la vitesse de rotation sur cet axe soit constante (Intégrale première d'Euler).

Application :



La méthode consiste à placer deux masselottes additionnelles sur la jante de la roue pour l'équilibrer.

Nous repérons la position de ces deux masselottes m₁ et m₂ par deux angles α_1 et α_2 .

${}^b\{\vec{OP}_1\} = \begin{Bmatrix} R \cos \alpha_1 \\ R \sin \alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$, ${}^b\{\vec{OP}_2\} = \begin{Bmatrix} R \cos \alpha_2 \\ R \sin \alpha_2 \\ e \end{Bmatrix}$

équilibrage dynamique d'une roue

Pour équilibrer la roue il faut que :

$$G \text{ appartienne à l'axe : } \begin{cases} md + m_1 R \cos \alpha_1 + m_2 R \cos \alpha_2 = 0 \\ m_1 R \sin \alpha_1 + m_2 R \sin \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Axe soit principal : } \begin{cases} D + 0 + m_2 e R \sin \alpha_2 = 0 \\ E + 0 + m_2 e R \cos \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ces quatre relations nous permettent de déterminer $(m_1, \alpha_1, m_2, \alpha_2)$

$$3 \text{ et } 4 \rightarrow \begin{cases} m_2 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{eR} \\ \alpha_2 = \arctan(D/E) \end{cases} \quad \text{dans 1 et 2} \rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{\sqrt{D^2 + (E/e - md)^2}}{eR} \\ \alpha_1 = \arctan(D/(E - mde)) \end{cases}$$

les grandeurs (E, D, d, m) caractérisent le déséquilibre initial de la roue, en pratique l'appareil (équilibreuse) mesure les vibrations (efforts) transmises au niveau de la liaison pivot, son programme calcul alors les valeurs (E, D, d, m) , et propose deux couples (masselotte, position : $m_1, \alpha_1, m_2, \alpha_2$) permettant d'équilibrer la roue en les fixant convenablement sur la jante.

- [Gyroscopes](#)

L'élément essentiel d'un gyroscope est un rotor tournant à grande vitesse. Les effets gyroscopiques sont souvent surprenant, et on est facilement déconcerté par les évolutions d'un gyroscope ou par les efforts que l'on peut ressentir en le tenant dans la main.

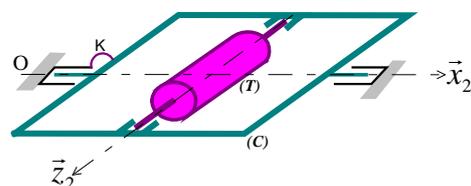
Tout solide en rotation se comportera comme un gyroscope si sa vitesse de rotation est suffisamment importante, citons comme exemple les turbines des centrales électriques, ou celles des moteurs, les pales d'hélicoptère ou d'éolienne, etc ...) pour ces systèmes les efforts dynamiques sont extrêmement importants et il y a un couplage des paramètres de mobilité. Ce qui peut s'avérer néfaste pour la tenue des liaisons mécaniques (phénomène de fatigue). Mais les phénomènes gyroscopiques peuvent aussi être très utiles.

Les principales applications sont liées au fait que l'axe du gyroscope conserve une direction constante dans l'espace. Le gyroscope peut être utilisé pour stabiliser un avion; en détectant les écarts entre la direction du gyroscope et la route de l'avion, il est alors possible d'agir automatiquement sur les commandes de vol; c'est le principe du pilote automatique. Une autre utilisation possible est l'horizon artificiel qui indique au pilote l'angle de vol de l'appareil par rapport au sol. Le gyroscope est à la base des systèmes de navigation à inertie qui, sur les avions rapides et les véhicules spatiaux, car ils permettent de corriger les effets secondaires des accélérations, qui ont une grande importance lorsque les vitesses sont élevées.

Étudions le comportement d'un gyromètre à un axe

A l'intérieur d'un avion est placé un gyromètre représenté sur la figure ci-dessous. Il est constitué d'un cadre (C) et d'un gyroscope (T) dont la vitesse de rotation propre est imposée.

L'axe de rotation du cadre (O, \vec{x}_2) est lié à l'avion et orienté vers l'avant. A l'équilibre, le plan horizontal est défini par $(O, \vec{x}_2, \vec{z}_2)$. Un ressort spiral s'oppose à la rotation du cadre.



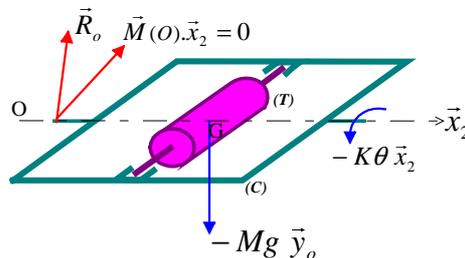
Nous allons chercher l'équation du mouvement du cadre lorsque l'avion se déplace en vol (le repère lié à l'avion n'est plus galiléen).

Paramétrage

- M^{vts} de l'avion / Ro (sol) : supposés connus (p, q, r) 3 composantes de $\vec{\Omega}_{oa}$ données
 M^{vts} du cadre / avion : liaison pivot \rightarrow 1 paramètre θ
 M^{vts} du gyro / cadre : La vitesse de rotation propre du gyroscope (T) donnée Ω .

Efforts sur (Σ)=(T+C)

- Efforts de liaison en O : pivot parfait d'axe $(O, \vec{x}_2) \rightarrow \begin{cases} \vec{R}_o & 3 \text{ inconnues} \\ \vec{M}(O, \vec{x}_2) = 0 & 2 \text{ inconnues} \end{cases}$
 Efforts donnés : Poids du système supposé équilibré $-Mg \vec{y}_o$ en G
 Couple de rappel du ressort $\vec{\Gamma}_k = -K\theta \vec{x}_2$



Bilan : 6 inconnues (1 paramètres + 5 efforts) pour 6 équations.

L'équation de moment par rapport à l'axe (G, \vec{x}_2) est l'équation principale $\vec{\delta}_o(G, \Sigma) \cdot \vec{x}_2 = -K\theta$

Calculs

utilisons les notations ci-dessous : $b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ la base liée au cadre

$\left\{ \vec{\Omega}_{oa} \right\}_{b_2} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$ Composantes sur la base b_2 du vecteur vitesse de rotation instantanée de l'avion par rapport à un repère galiléen lié à la surface de la terre.

$\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}$ Matrice d'inertie en G du gyroscope sur la base b_2
 c'est un solide de révolution

$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_1 + C_1 & \\ & & C_1 \end{pmatrix}$ Matrice d'inertie en G du cadre sur la base b_2
 c'est un solide plan

$\vec{\delta}_o(G, \Sigma) = \frac{d_o}{dt} (\vec{\sigma}_o(G, \Sigma))$ car G centre de masse de Σ

$\vec{\sigma}_o(G, \Sigma) = \vec{\sigma}_o(G, C) + \vec{\sigma}_o(G, T)$

avec $\vec{\sigma}_o(G, C) = J(G, C) \vec{\Omega}_{oc} = \begin{Bmatrix} A_1(p + \dot{\theta}) \\ (A_1 + C_1)q \\ C_1 r \end{Bmatrix}_{b_2}$ car G cdm de C

et $\vec{\sigma}_o(G,T) = J(G,T) \vec{\Omega}_{ot} = \begin{Bmatrix} A(p + \dot{\theta}) \\ Aq \\ C(r + \Omega) \end{Bmatrix}$ car G cdm de T

$\Rightarrow \vec{\sigma}_o(G,\Sigma) = \begin{Bmatrix} (A + A_1)(p + \dot{\theta}) \\ (A + A_1 + C_1)q \\ (C + C_1)r + C\Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A^*(p + \dot{\theta}) \\ B^*q \\ C^*r + C\Omega \end{Bmatrix}$

dérivation vectorielle $\vec{\delta}_o(G,\Sigma) = \frac{d_{b2}}{dt} (\vec{\sigma}_o(G,\Sigma)) + \vec{\Omega}_{ob2} \wedge \vec{\sigma}_o(G,\Sigma)$

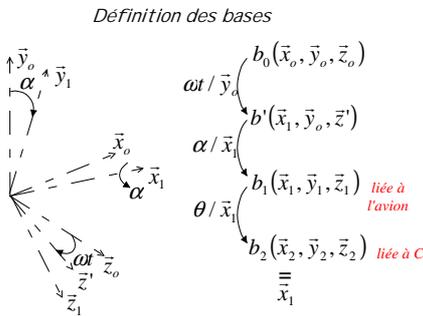
d'où $\vec{\delta}_o(G,\Sigma) = \begin{Bmatrix} A^*(\dot{p} + \ddot{\theta}) \\ B^*\dot{q} \\ C^*\dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p + \dot{\theta} \\ q \\ r \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} A^*(p + \dot{\theta}) \\ B^*q \\ C^*r + C\Omega \end{Bmatrix}$

On ne cherche que la première composante : $\vec{\delta}_o(G,\Sigma) \cdot \vec{x}_2 = A^*(\dot{p} + \ddot{\theta}) + (C^* - B^*)rq + C\Omega q$

Application :

En pratique un système dissipatif amorti les mouvements du cadre qui tends rapidement vers sa position d'équilibre, nous cherchons l'inclinaison du gyromètre dans cette position stabilisée (position d'équilibre en θ), lorsque l'avion se déplace en vol horizontal à une vitesse de **3000 Km/h** et effectue un virage à droite de rayon $R = 5 \text{ Km}$. L'inclinaison de l'avion vers l'intérieur du virage est de 30° $\dot{\theta} = 0$

Données du vol



Les données du vol de l'avion par rapport à un repère galiléen lié à la surface de la terre permet de déterminer le vecteur vitesse de rotation instantané de l'avion les bases sont définies par la figure ci-contre.

Inclinaison de $\alpha = 30^\circ$ vers l'intérieur

$p = \dot{\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0$

Vol horizontal et Virage à droite

$\vec{\Omega}_{oa} = -\omega \vec{y}_o$ avec $\omega = \frac{V}{R}$

L'équation donnant la position d'équilibre dans le cadre des données de ce vol est :

$-K\theta_e = (C^* - B^*)rq + C\Omega q$

Relation qui se simplifie car la vitesse de rotation propre du gyroscope $\Omega = 18000 \text{ tr/min}$ est très grande devant celle de l'avion $\Omega \gg p, q, r$

$-K\theta_e = C\Omega (-\omega \vec{y}_o \cdot \vec{y}_2) \Rightarrow K\theta_e = C\Omega \frac{V}{R} \cos(30^\circ + \theta_e)$

Application numérique :

Le gyroscope est de masse $m = 65 \text{ g}$, son rayon de giration $r = 15 \text{ mm}$ et sa vitesse de rotation propre est $\Omega = 18000 \text{ tr/min}$. Le ressort spiral qui s'oppose à la rotation du cadre, a pour de constante de torsion $K = 0,1 \text{ Nm}$.

En supposant l'angle θ petit par rapport à 30° $\theta_e \cong \frac{mr^2\Omega V}{K R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\theta_e \right) \Rightarrow \theta_e \cong 2,4^\circ$

Analyse : Dans la configuration de vol proposée la rotation du cadre du gyromètre indique donc l'inclinaison de l'avion (angle de roulis α) qui en fait est fonction de la vitesse de rotation de l'avion dans le plan horizontal (angle de lacet).